Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 2 (3) (2014), 1-11

ZANIMLJIVI ZADACI O BROJU 2014 (II)

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu i Gimnazija „Svetozar Marković" Niš
dsimce@gmail.com

Branimir V. Lapčević
OŠ „Stojan Novaković" Blace
banelapcevic@gmail.com

Jelena Radonjić
STŠ „ Vožd Karađorđe" i OŠ „Radovan Kovačević - Maksim" Lebane
jecika82@gmail.com

Darko D. Zdravković
OŠ „Dobrila Stambolić" Svrljig
darko@zdravkovic.iz.rs

Dragi čitaoče, pred tobom je nastavak rada sa zadacima o broju 2014. Nadamo se da češ, pažljivim i detaljnim rešavanjem (pre svega algebarskih) zadataka upotpuniti svoje znanje.

Zadatak 1 *Odredi proste brojeve p i q i prirodan broj r tako da je*

$$6p + 5q + 4r = 2014.$$

Rešenje: Kako su $6p$, $4r$ i 2014 parni brojevi, zaključujemo da i $5q$ mora biti paran broj, odnosno da je $q = 2$. Sada je $6p + 4r = 2004$, pa je $3p + 2r = 1002$. Analogno prethodnom zaključivanju imamo da je $p = 2$ i $r = 498$. $\square$

Zadatak 2 *Ako je p prost broj, tada je $p + (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + 2014)$ složen broj. Dokazati.*

Rešenje:

$$p + (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + 2014) = 2015p + (1 + 2 + \cdots + 2014) =$$

$$= 2015p + \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 2015(p + 1007).$$

$$\Longrightarrow p + (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + 2014) \text{ je složen broj. } \square$$

Zadatak 3 *Koliko ima uređenih parova prirodnih, a koliko celih brojeva koji zadovoljavaju nejednačinu*

$$|x| + |y| < 2014?$$

Rešenje: Odredimo prvo broj uređenih parova (x, y), $x, y \in \mathbf{N}$ koji zadovoljavaju uslov zadatka.
Ako je $x = 1$, y može biti element skupa $\{1, 2, \ldots, 2012\}$.
Ako je $x = 2$, y može biti element skupa $\{1, 2, \ldots, 2011\}$.

$$\vdots$$

Ako je $x = 2012$, y može biti element skupa $\{1\}$.
Dakle, ovakvih parova u skupu $\mathbf{N}$ ima

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2012 = \frac{2012 \cdot 2013}{2} = 1006 \cdot 2013 = 2025078.$$

Ako je $(x, y) \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, svakom uređenom paru (x, y) možemo pridružiti uređene parove $(-x, y)$, $(x, -y)$ i $(-x, -y)$, pa je broj takvih celih brojeva koji ispunjavaju uslove zadatka $4 \cdot 2025078 = 8100312$.
Ostaje nam da prebrojimo uređene parove koji zadovoljavaju uslov zadatka i kojima je bar jedna koordinata jednaka nuli.

Ako je $x = 0$, nejednačina se svodi na $|y| < 2014$, pa imamo $2 \cdot 2013 + 1 = 4027$ mogućnosti za y. Uređenih parova čija je prva koordinata jednaka nuli ima 4027, a analogno tome, toliko ima i uređenih parova čija je druga koordinata jednaka nuli.

Dakle, uređenih parova čija je bar jedna koordinata jednaka nuli a ispunjavaju uslove zadatka je $4027 + 4027 - 1 = 8053$.

Traženi broj uređenih parova u skupu $\mathbf{Z}$ je $8100312 + 8053 = 8108365$. $\square$

Zadatak 4 *Dokazati da postoje prirodni brojevi x i y čiji je zbir kvadrata jednak* $10^{2^{2014}}$.

Rešenje: Indukcijom ćemo dokazati da se svaki broj oblika 10^{2^n} može predstaviti u obliku zbira dva potpuna kvadrata, tj. da za svaki prirodan broj n postoje prirodni brojevi x_n i y_n, takvi da je

$${x_n}^2 + {y_n}^2 = 10^{2^n}.$$

Za $n = 1$ možemo uzeti $x_1 = 8$ i $y_1 = 6$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za neki prirodan broj n i dokažimo da tvrđenje važi i za prirodan broj $n + 1$. Brojeve x_{n+1} i y_{n+1} izabraćemo korišćenjem brojeva x_n i y_n na sledeći način:

$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2$, $y_{n+1} = 2x_ny_n$.

Sada dobijamo

$${x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2 = ({x_n}^2 - {y_n}^2)^2 + (2x_ny_n)^2 = ({x_n}^2 + {y_n}^2)^2 = (10^{2^n})^2 = 10^{2^{n+1}},$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Zadatak 5 *Dokazati da postoji potpuni kvadrat čiji je zbir cifara* 2014.

Rešenje: Mogući ostaci prilikom deljenja prirodnog broja n sa 9 su $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ i 8, iz čega sledi da su ostaci prilikom deljenja broja n^2 sa 9 zapravo brojevi $0, 1, 4, 7$. Na osnovu kriterijuma deljivosti sa 9, isto važi i za zbir cifara potpunog kvadrata. Dakle, zbir cifara potpunog kvadrata može biti oblika $9k, 9k+1, 9k+4, 9k+7$. Dokazaćemo da je svaki broj oblika $9k, 9k+1, 9k+4, 9k+7$ jednak zbiru cifara nekog potpunog kvadrata.

Broj $9k$ je zbir cifara broja

$$(10^k-1)^2 = 10^k(10^k-2)+1 = \underbrace{99\ldots9}_{k-1}8\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1.$$

Broj $9k+1$ $(k \neq 0)$ je zbir cifara broja

$$(10^k-2)^2 = 10^k(10^k-4)+4 = \underbrace{99\ldots9}_{k-1}6\underbrace{00\ldots0}_{k-1}4.$$

(za $k=0$, dobija se broj 1, koji je zbir cifara broja 1^2) .

Broj $9k+4$ $(k \neq 0)$ je zbir cifara broja

$$(10^k-3)^2 = 10^k(10^k-6)+9 = \underbrace{99\ldots9}_{k-1}4\underbrace{00\ldots0}_{k-1}9.$$

(za $k=0$, dobija se broj 4, koji je zbir cifara broja 2^2) .

Broj $9k+7$ je zbir cifara broja

$$(10^{k+1}-5)^2 = 10^{k+1}(10^{k+1}-10)+25 = \underbrace{99\ldots9}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{k}25.$$

Na osnovu prethodnog, kako 2014 pri deljenju sa 9 daje ostatak 7, sledi da postoji potpuni kvadrat čiji je zbir cifara 2014. Na osnovu prethodnih razmatranja, zaključujemo da broj $(10^{224}-5)^2$ ima zbir cifara 2014. $\square$

Zadatak 6 *Na koliko načina se broj* $\frac{2015}{2014}$ *može prikazati kao proizvod dva razlomka oblika* $\frac{n+1}{n}, n \in \mathbf{N}$?

Rešenje: Neka su p i q prirodni brojevi, takvi da je

$$\frac{2015}{2014} = \frac{p+1}{p} \cdot \frac{q+1}{q}.$$

Tada je $2015pq = 2014(pq+p+q+1)$, odnosno, $pq = 2014(p+q+1)$.
Izražavanjem broja p dobijamo da je

$$p = \frac{2014(q+1)}{q-2014} = \frac{2014(q-2014)+2015\cdot2014}{q-2014}.$$

Kako su p i q prirodni brojevi, $q-2014$ je pozitivan delilac broja $2015 \cdot 2014$, i svakom deliocu broja $2015 \cdot 2014$ odgovara tačno jedan par (p, q).
Kako je $2015 \cdot 2014 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 53$, traženi broj delilaca je 2^6. $\square$

Zadatak 7 *Dokazati da je*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} \cdot \frac{2011}{2012} \cdot \frac{2013}{2014} < \frac{1}{\sqrt{2015}}.$$

Rešenje:

$$\frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)} < \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} < \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \tag{1}$$

Koristeći (1) imamo da je

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad \wedge \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \quad \wedge \quad \frac{5}{6} < \frac{6}{7} \quad \wedge \quad \dots \quad \wedge \quad \frac{2011}{2012} < \frac{2012}{2013} \quad \wedge \quad \frac{2013}{2014} < \frac{2014}{2015} \quad .$$

Množenjem ovih nejednakosti dobijamo da je

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} \cdot \frac{2011}{2012} \cdot \frac{2013}{2014} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2010}{2011} \cdot \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2014}{2015} \quad \Leftrightarrow$$

$$P < \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{7}{6}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\frac{2011}{2010}} \cdot \frac{1}{\frac{2013}{2012}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2014}} \cdot \frac{1}{2015} \quad \Leftrightarrow$$

$$P < \frac{1}{2015} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} \cdot \frac{2011}{2012} \cdot \frac{2013}{2014}} \quad \Leftrightarrow \quad P < \frac{1}{2015} \cdot \frac{1}{P} \Leftrightarrow$$

$$P^2 < \frac{1}{2015} \quad \Leftrightarrow \quad P < \frac{1}{\sqrt{2015}}. \ \square$$

Zadatak 8 *Dokazati nejednakost :*

$$(log_{2013}2014)^{-1} + (log_{2015}2014)^{-1} < 2.$$

Rešenje:

$$(log_{2013}2014)^{-1} + (log_{2015}2014)^{-1} \quad = \quad \frac{1}{log_{2013}2014} \quad + \quad \frac{1}{log_{2015}2014}$$

$$= log_{2014}2013 \quad + \quad log_{2014}2015 \quad = \quad log_{2014}(2013 \cdot 2015) \quad = \quad log_{2014}(2014^2 - 1)$$

$$< \quad log_{2014}2014^2 \quad = \quad 2. \ \square$$

Zadatak 9 *Koliko ima jednakokrakih trapeza sa celobrojnim stranicama čiji je obim* 2014?

Rešenje: Neka su a, b i c stranice trapeza, pri čemu je a duža osnovica, b kraća osnovica i c krak trapeza. Kako je $a < b + c + c$, dobijamo da je $a < \frac{a+b+2c}{2} < 1007$.

Za fiksirano a iz skupa $\{1, 2, 3, \dots, 1006\}$ možemo uzeti bilo koje b koje je manje od a i iste parnosti kao a, što daje $[\frac{a-1}{2}]$ mogućnosti.

Tada je c jedinstveno određeno, a samim tim i jednakokraki trapez.

Traženi broj trapeza je

$$\sum_{a=1}^{1006}[\frac{a-1}{2}] = 0 + 0 + 1 + 1 + \quad \dots \quad + 502 + 502 \; = \; 2 \cdot \frac{502 \cdot 503}{2} \; = \; 502 \cdot 503. \; \square$$

Napomena: Ukoliko prihvatimo tumačenje da su pravougaonici specijalan slučaj trapeza, broj rešenja ovog zadatka se povećava-ostavljamo čitaocu da odredi njihov tačan broj.

Zadatak 10 *Odrediti broj rešenja jednačine*

$$x^{2014} + y^{2014} \; = \; x^{2015} + y^{2015}$$

u skupu racionalnih brojeva.

Rešenje: Transformišimo datu jednačinu :

$$x^{2014} + y^{2014} \; = \; x^{2015} + y^{2015} \;\Leftrightarrow\; y^{2014}\Big(\frac{x^{2014}}{y^{2014}} + 1\Big) = y^{2015}\Big(\frac{x^{2015}}{y^{2015}} + 1\Big).$$

Prethodna jednačina se smenom $\frac{x}{y} = t$, za $y \neq 0$ svodi na

$$1 + t^{2014} = y \cdot (1 + t^{2015}).$$

Za $t \neq -1$, imamo da je $y = \frac{1+t^{2014}}{1+t^{2015}}$; $x = t \cdot y = t \cdot \frac{1+t^{2014}}{1+t^{2015}}$.

Za $t = -1$, imamo da je $x = -y$, i iz početne jednačine dobijamo da je

$$(-y)^{2014} + y^{2014} \; = \; (-y)^{2015} + y^{2015} = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Skup rešenja ove jednačine je

$$S = \{(0, 0), \Big(t \cdot \frac{1 + t^{2014}}{1 + t^{2015}} \; , \; \frac{1 + t^{2014}}{1 + t^{2015}}\Big), \; t \in \mathbf{Q} \setminus \{-1\}\}.$$

Zaključujemo da jednačina ima beskonačno mnogo rešenja u skupu $\mathbf{Q}$. $\square$

Zadatak 11 *Dat je niz* $1, 2, 4, 8, 16, 23, \dots$ *, u kome je svaki sledeći broj jednak zbiru prethodnog broja i zbira njegovih cifara, odnosno* $a_1 = 1$ *i* $a_n = a_{n-1} + S(a_{n-1}), n > 1$*, gde* $S(x)$ *predstavlja zbir cifara broja* x*. Da li se u tom nizu javlja broj* 2014*? A broj* 2015*?*

Rešenje: Koristićemo činjenicu da brojevi x i $S(x)$ daju jednake ostatke pri deljenju sa 3, odnosno $x \equiv_3 S(x)$. Odatle je $a_n \equiv_3 2a_{n-1}$, odnosno $a_1 \equiv_3 1$, $a_2 \equiv_3 2$, $a_3 \equiv_3 1$, $a_4 \equiv_3 2, \ldots$ odakle indukcijom sledi da je $a_{2k-1} \equiv_3 1$ i $a_{2k} \equiv_3 2$ za $k \geq 1$.

Kako je $2014 \equiv_3 1$ i $2015 \equiv_3 2$, ovi brojevi jesu članovi ovoga niza. $\square$

Zadatak 12 *Odredi poslednje dve cifre broja* 7^{2014}.

Rešenje: Kako je $7^4 = 2401$ i $2014 = 4 \cdot 503 + 2$, imamo da je $7^{2014} = 7^{2012+2} = (7^4)^{503} \cdot 7^2 = (2401)^{503} \cdot 7^2 = \ldots 01 \cdot 49 = \ldots 49$. Dakle, poslednje dve cifre broja 7^{2014} su 49. $\square$

Zadatak 13 *Odredi prirodan broj* x *tako da važi jednakost* $x^{2014} = x^{2013} + 2013$.

Rešenje: Iz date jednakosti dobijamo da je $x^{2014} - x^{2013} = 2013$. Ako je x paran broj, onda su x^{2014} i x^{2013} parni brojevi, pa njihova razlika, koja je takođe paran broj, ne može biti neparan broj 2013.

Ako je x neparan broj, onda su x^{2014} i x^{2013} neparni brojevi, pa njihova razlika, koja je paran broj, ne može biti 2013. Zaključujemo da ne postoji prirodan broj koji zadovoljava datu jednakost. $\square$

Zadatak 14 *Koliki je zbir svih prirodnih brojeva* n *za koje je* $\frac{2014-n}{99}$ *prirodan broj?*

Rešenje: Neka je $k = \frac{2014-n}{99}$. Tada je $n = 2014 - 99 \cdot k$. Broj n je prirodan, ako je $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Traženi zbir je

$$(2014 - 99 \cdot 1) + (2014 - 99 \cdot 2) + \cdots + (2014 - 99 \cdot 20) =$$

$$= 20 \cdot 2014 - 99 \cdot (1 + 2 + \cdots + 20) = 40280 - 99 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} =$$

$$= 40280 - 99 \cdot 210 = 40280 - 20790 = 19490. \ \square$$

Zadatak 15 *Odrediti cifru na* 2014. *mestu iza decimalne zapete pri predstavljanju razlomka* $\frac{1}{14}$ *u decimalnom zapisu.*

Rešenje: Uočimo da je $\frac{1}{14} = 0,0\overline{714285}$, a to je periodičan decimalni broj i period je šestocifren.

Kako je $2014 = 1 + 6 \cdot 335 + 3$, zaključujemo da je tražena cifra treća cifra perioda. Dakle, tražena cifra je 4. $\square$

Zadatak 16 *Rešiti sistem jednačina*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2013$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2014$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2015.$$

Rešenje: Sabiranjem ovih jednačina dobijamo

$$2 \cdot (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 6042, \text{ pa je}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3021.$$

Oduzimajući redom date jednačine od poslednje dobijamo da je

$$\frac{1}{z} = 1008, \frac{1}{x} = 1007, \frac{1}{y} = 1006, \text{ odnosno}$$

$$(x, y, z) = \Big(\frac{1}{1007}, \frac{1}{1006}, \frac{1}{1008}\Big). \ \square$$

Zadatak 17 *Neka je k prirodan broj i neka je $P(x) = x^{2014} - x^{2012} + x^4 - 3kx + 3x + 3k + 1$. Dokazati da za svaki ceo broj n važi $P(n) \neq 0$.*

Rešenje: Pretpostavimo suprotno, da postoji prirodan broj n za koji važi da je $P(n) = 0$.
Tada je $P(x) = P(x) - P(n) =$

$$x^{2014} - n^{2014} - x^{2012} + n^{2012} + x^4 - n^4 - 3kx + 3kn + 3x - 3n =$$

$$= (x-n)(x^{2013} + \cdots + n^{2013}) \ - \ (x-n)(x^{2011} \ + \ \cdots + n^{2011}) \ +$$
$$+ \ (x-n)(x^3 + x^2 n + n^2 x + n^3) \ - \ 3x(x-n) \ + \ 3(x-n) = (x-n)Q(x).$$

Dakle, $P(x) = (x-n)Q(x)$, gde je $Q(x)$ polinom sa celim koeficijentima. Izračunajmo na osnovu toga $P(-1), P(0)$ i $P(1)$.

$$P(-1) = 6k - 2 = (-1-n)Q(-1)$$
$$P(0) = 3k + 1 = -nQ(0)$$
$$P(1) = 5 = (1-n)Q(1)$$

Brojevi $(-1-n), -n$ i $(1-n)$ su tri uzastopna cela broja, pa je jedan od njih deljiv sa 3. Onda bi jedan od brojeva $6k+2, 3k+1$ i 2 morao biti deljiv sa 3, što očigledno nije moguće. Zaključujemo da početna pretpostavka nije dobra i da je $P(n) \neq 0, \ \forall n \in \mathbf{Z}$. $\square$

Zadatak 18 *Odrediti sve kvadratne jednačine oblika $x^2 + mx + n = 0$, $m, n \in \mathbf{R}$, ako je zbir kvadrata rešenja jednačine 2014^2 i $|m - n| = 2014$.*

Rešenje: Kako je ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2014^2$, korišćenjem Vijetovih pravila imamo da je $m^2-2n=2014^2$.
Uslov $|m-n|=2014$ možemo da razložimo na dva slučaja: $m-n=2014$ ili $m-n=-2014$, pa dobijamo dva sistema jednačina:

$$m^2-2n=2014^2$$
$$m-n=2014.$$

i

$$m^2-2n=2014^2$$
$$m-n=-2014.$$

Iz prvog sistema imamo da je $n=m-2014$, pa je $(m-2014)(m+2012)=0$, odakle dobijamo rešenja $m_1=2014$, $n_1=0$ i $m_2=-2012$, $n_2=-4026$.
Iz drugog sistema jednačina imamo da je $n=m+2014$, pa je $(m-2016)(m+2014)=0$, odakle dobijamo rešenja $m_3=2016$, $n_3=4030$ i $m_4=-2014$, $n_4=0$.
Tražene kvadratne jednačine su

$$x^2+2014x=0$$
$$x^2-2012x-4026=0$$
$$x^2+2016x+4030=0$$
$$x^2-2014x=0.\ \Box$$

Zadatak 19 *Ako $[x]$ označava ceo deo realnog broja x, rešiti sistem jednačina*

$$x-y=2012$$
$$[x]+[y]=2014.$$

Rešenje: Kako je prvu jednačinu sistema moguće zapisati u obliku

$$[x]+\{x\}-[y]-\{y\}=2012,$$

zbog uslova $0\le\{x\},\{y\}<1$, zaključujemo da je $\{x\}-\{y\}\in\mathbf{Z}$, odnosno $\{x\}=\{y\}$.
Sada sistem izgleda

$$[x]-[y]=2012$$
$$[x]+[y]=2014,\ \text{ odnosno}$$

$[x]=2013$ i $[y]=1$.
Skup rešenja ovog sistema je $R=\{(2013+k,1+k),0\le k<1\}$. $\Box$

Zadatak 20 *Data je nejednačina* $|x| < 2014$(*x je ceo broj*). *Koliki je zbir, a koliki proizvod svih njenih rešenja?*

Rešenje: Sva rešenja ove nejednačine su

$$-2013, -2012, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2012, 2013.$$

I zbir i proizvod ovih rešenja jednak je 0. □

Zadatak 21 *Ako je* $x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} = 2$, *onda je i* $x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}} = 2$. *Dokazati.*

Rešenje: Kako je

$$x^{2012} + \frac{1}{x^{2012}} = 2,$$

zaključujemo da je

$$(x^{2012} - 1)^2 = 0,$$

odnosno $x^{2012} = 1$, pa je $x = 1$ ili $x = -1$. Tada je $x^{2014} = 1$,odakle je $x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}} = 2$. □

Zadatak 22 *Dokazati da ne postoji pravougli trougao čiji su merni brojevi kateta prirodni brojevi, a hipotenuza dužine* $\sqrt{2014}$ *cm.*

Rešenje: $c^2 = 2014 = m^2 + n^2$. Kako je 2014 paran broj, brojevi m i n su iste parnosti.

Ako su oba parna, onda je $m^2 + n^2 = 4k^2 + 4p^2 = 2014$, što nije moguće jer je leva strana deljiva sa 4, a desna nije.

Ako su oba neparna, onda je $m^2 + n^2 = (2k+1)^2 + (2p+1)^2 = 4k^2 + 4k + 4p^2 + 4p + 2 = 2014$, pa je $4k^2 + 4k + 4p^2 + 4p = 2012$. Deljenjem sa 4 dobijamo da je $k^2 + k + p^2 + p = k(k+1) + p(p+1) = 503$, što nije moguće jer je na desnoj strani neparan, a na levoj paran broj.

Dakle, ne postoji pravougli trougao koji ispunjava uslove zadatka. □

Zadatak 23 *Da li postoje celi brojevi za koje važi da je*

$$x^2 + 2014 = y^2?$$

Rešenje: Data jednačina se transformiše u jednačinu $y^2 - x^2 = 2014$, odnosno $(y-x)(y+x) = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Na osnovu razlaganja broja 2014 imamo sledeće rezultate:

$y-x=1$ $y+x=2014$	$y-x=-1$ $y+x=-2014$
$y-x=2$ $y+x=1007$	$y-x=-2$ $y+x=-1007$
$y-x=19$ $y+x=106$	$y-x=-19$ $y+x=-106$
$y-x=53$ $y+x=38$	$y-x=-53$ $y+x=-38$
$y-x=38$ $y+x=53$	$y-x=-38$ $y+x=-53$
$y-x=106$ $y+x=19$	$y-x=-106$ $y+x=-19$

Odavde zaključujemo da nijedno rešenje ne pripada skupu $\mathbb{Z}$, pa u skupu $\mathbb{Z}$ data jednačina nema rešenja. $\square$

Zadatak 24 *Rešiti nejednačinu*

$$2014^{2x} - 2014^{x} - 2013 \cdot 2014 \geqslant 0.$$

Rešenje: Uvođenjem smene 2014^x data nejednačina postaje $t^2 - t - 2013 \cdot 2014 \geqslant 0$, odnosno $(t-2014)(t+2013) \geqslant 0$. Kako je

	-2013	2014	
$t-2014$	$--$	$---$	$++$
$t+2013$	$--$	$+++$	$++$
P	$+$	$-$	$+$

rešenje nejednačine je $t \leq -2013$ ili $t \geq 2014$ odnosno $2014^x \leq -2013$ ili $2014^x \geq 2014$. Traženo rešenje je $x \geq 1$. $\square$

Literatura

[1] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva, materijali za mlade matematičare, sveska 15*, DMS, Beograd 2004.

[2] S. B. Branković, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole*, odabrana poglavlja, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.

[3] *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici "zadaci iz matematike" časopisa *Tangenta* 1995 - 2005. godine, priredio B. Popović, DMS, Beograd 2006.

[4] I. Dolinka, *Elementarna teorija brojeva: moji omiljeni zadaci*, DMS, Beograd 2007.

[5] V. Baltić, D. Đukić, Đ. Krtinić, I. Matić, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd 2008.

[6] M. Stanić, N. Ikodinović, *Teorija brojeva–zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2004.

[7] R. Tošić, D. Milošević, *Brojevi–nestandardni zadaci*, Arhimedes, Beograd 1996.

[8] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović *Analiza sa algebrom 2*, Krug, Beograd 2002.

[9] V. Andrić, *Matematika* $x = 1236$*, Priručnik za pripremanje za takmičenje učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda*, Krug, Beograd 2006.

[10] Društo matematičara Srbije, *Matematička takmičenja srednjoškolaca, godišta* $2006/07 - 2011/12$.

[11] Z. Kadelburg, P. Mladenović, *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, Beograd 1990.

[12] B. Marinković, D. Stošić–Miljković, *Par–nepar*, Materijali za mlade matematičare, sveska 167, Arhimedes, Beograd 2013.